Correction du DS 1

Julien Reichert

Exercice 1

Pour simplifier les calculs, on va échanger l'ordre des facteurs, afin d'avoir deux couples de lignes identiques.

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & & & 1 & 9 & 7 & 4 \\
\times & & & & A & B & B & A \\
\hline
 & & & & F^{\cancel{5}} & E^{\cancel{4}} & 8^{\cancel{2}} & 8 \\
 & & 1 & 1^{\cancel{6}} & 7^{\cancel{4}} & F^{\cancel{2}} & C & 0 \\
 & 1 & 1 & 7 & F & C & 0 & 0 \\
 & F & E & 8 & 8 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
1 & 1^{\cancel{1}} & 1^{\cancel{1}} & 2^{\cancel{2}} & F^{\cancel{2}} & A^{\cancel{1}} & 4 & 8
\end{array}
$$

Exercice 2

Deux méthodes sont possibles : écrire le nombre 73 de droite à gauche par des divisions euclidiennes successives ($73 = 2 \times 36 + 1$, donc on a un 1 tout à droite, $36 = 2 \times 18 + 0$, donc on ajoute un 0 à sa gauche, etc.) ou en trouvant une décomposition de 73 comme une somme de puissances de 2, à savoir $64 + 8 + 1$, ce qui permet de déduire que les bits aux positions 6, 3 et 0 seront à 1 et les autres à 0. Le nombre s'écrit donc $\overline{01001001}^2$, le 0 initial permettant de faire figurer huit bits (on peut tolérer son absence, mais pour un grand nombre de bits cela saute plus aux yeux de savoir si le nombre est positif ou négatif).

Par ailleurs, le nombre écrit $\overline{10101010}^2$ est donc négatif, d'après le principe de la représentation en complément à deux. On peut utiliser la méthode d'obtention de l'opposé en remplaçant les 1 par des 0 et vice-versa, puis en ajoutant 1, ce qui donne le nombre représenté par $\overline{01010110}^2$, soit 86 en tant qu'entier naturel, d'où le nombre -86 pour la représentation de l'énoncé. On peut aussi déterminer quel serait l'entier naturel représenté, ici 170, et puisqu'on sait que la réponse est entre -128 et 127 (et même forcément négative) et exacte à 256 près (on aura retenu à force que $2^7 = 128$ et $2^8 = 256$), la réponse est en fait $170 - 256$ donc -86.

Exercice 3

Pour rappel, l'écriture en virgule flottante sur 16 bits utilise un bit de signe, puis 5 bits d'exposant et finalement 10 bits de mantisse.

La partie entière du résultat est évidente : il s'agit de 0. Pour la suite, il est bien plus judicieux de n'utiliser que des fractions.

$$
\begin{aligned}
2\times \ \tfrac{12}{19} &= 1 + \tfrac{5}{19}\\
2\times \ \tfrac{5}{19} &= 0 + \tfrac{10}{19}\\
2\times \ \tfrac{10}{19} &= 1 + \tfrac{1}{19}\\
2\times \ \tfrac{1}{19} &= 0 + \tfrac{2}{19}\\
2\times \ \tfrac{2}{19} &= 0 + \tfrac{4}{19}\\
2\times \ \tfrac{4}{19} &= 0 + \tfrac{8}{19}\\
2\times \ \tfrac{8}{19} &= 0 + \tfrac{16}{19}\\
2\times \ \tfrac{16}{19} &= 1 + \tfrac{13}{19}\\
2\times \ \tfrac{13}{19} &= 1 + \tfrac{7}{19}\\
2\times \ \tfrac{7}{19} &= 0 + \tfrac{14}{19}\\
2\times \ \tfrac{14}{19} &= 1 + \tfrac{9}{19}\\
2\times \ \tfrac{9}{19} &= 1 + \tfrac{18}{19}\\
2\times \ \tfrac{18}{19} &= 1 + \tfrac{17}{19}
\end{aligned}
$$

Le cycle n'est pas encore trouvé, il est donc forcément de taille 18 (grâce au petit théorème de Fermat, on sait que la taille du cycle divise $19-1$, car 19 est premier, et il n'y a aucun diviseur de 18 entre 9 et lui-même). En attendant, la mantisse est remplie et on a aussi de quoi gérer l'arrondi. L'écriture scientifique binaire de $\frac{12}{19}$ est donc $\overline{1,010000110111\ldots}^2 \times 2^{-1}$.

L'exposant est donc -1, représenté sur 5 bits comme $-1+2^{5-1}-1$, soit $\overline{01110}^2$. La mantisse commence par le 0 suivant immédiatement la virgule (le 1 étant implicite), elle est donc de $\overline{0100001110}$ après l'arrondi par excès.

La représentation finale est alors 0 01110 0100001110.

Exercice 4

Le plus petit nombre strictement positif représentable en virgule flottante (hors valeurs exceptionnelles) sur 16 bits s'écrit 0 00001 $0\ldots0$ et correspond à 2^{-14}, le plus grand nombre s'écrit 0 11110 $1\ldots1$ et correspond à $2^{15}\times(1+2^{-1}+2^{-2}+\cdots+2^{-10}) = 2^{16}-2^{5} = 65504,0$ (l'ajout de la virgule signale bien qu'on dispose d'un flottant, c'est un bon réflexe).

Exercice 5

La méthode consiste à découper en blocs de 4 (car $16 = 2^4$) et de convertir bloc par bloc. Le découpage doit se faire depuis la droite (ce qui est normal car dans les conversions on considère les restes dans les divisions euclidiennes), et ici par bienveillance la taille du nombre est un multiple de 4, ce qui ne change rien (on peut envisager d'ajouter des 0 à gauche, ce qui correspond à du « padding »).

Le nombre binaire 1010010101001110 se découpe donc en 1010 0101 0100 1110 et en faisant correspondre 1010 à A en hexadécimal (le nombre 10), et de même pour les trois autres, on tombe sur le nombre écrit $A54E$ en hexadécimal, ce qui ne veut rien dire vu que l'exercice a été engendré en tapant au hasard sur le clavier et en retirant les trois bits de trop pour avoir une taille multiple de 4 (également au hasard).

Quant à la conversion du nombre hexadécimal $EFFACEE$, elle est analogue : on convertit chacun des chiffres hexadécimaux en séquences de 4 bits (en maintenant bien les éventuels 0 initiaux, mais ici il n'y en a pas vu que les chiffres sont trop grands) qu'on colle l'une à l'autre, ce qui donne le nombre écrit 1110111111111010110011101110 en binaire.

Exercice bonus

Quelle que soit la méthode, l'exercice est long et difficile, et le mieux est de faire la première division euclidienne, de convertir le reste, de comprendre la fin de l'histoire et de répondre que le nombre donné s'écrit $REICHERT$ en base 30.